複素空間形上の軌道と A 型実超曲面上の軌道

青木　侑省　(名古屋工業大学 D1)*1

足立　俊明　(名古屋工業大学)

1　導入

リーマン多様体上の閉 2 形式 $\mathbb{B}$ を磁場といい、接束の自己準同型写像 $\Omega_{\mathbb{B}}$ を任意の接ベクトル v, w に対して $\langle v, \Omega(w)\rangle = \mathbb{B}(v, w)$ で定義する。特に、ケーラー多様体上の磁場が複素構造 J を使って $\mathbb{B}_k(v, w) = \langle v, kJw\rangle$ で与えられる。リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、弧長によって径数付けられた滑らかな曲線 γ が微分方程式 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \Omega_{\mathbb{B}}(\dot\gamma)$ を満たすとき γ を M 上の磁場 $\mathbb{B}$ の軌道といい、ケーラー磁場の軌道 γ は $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = kJ\dot\gamma$ で与えられる。リーマン多様体 M 上の弧長で径数づけられた滑らかな曲線 γ_1, γ_2 が合同であるとは、$\gamma_2 = \varphi \circ \gamma_1$ を満たす M の等長写像 φ が存在することと定義する。

補題 1　非平坦な複素空間形 $\mathbb{C}M^n$ 上の 2 つのケーラー磁場 $\mathbb{B}_{k_1}, \mathbb{B}_{k_2}$ の軌道 γ_1, γ_2 が合同であるための必要十分条件は $|k_1| = |k_2|$ である。

ケーラー多様体 $\widetilde{M}$ 上の実超曲面 M と M 上の単位法ベクトル場 $\mathcal{N}$ に対して、$(1,1)-$テンソル場 ϕ、ベクトル場 ξ、1-形式 η を $\xi = -J\mathcal{N},\ \eta(v) = \langle v, \xi\rangle,\ \phi(v) = Jv - \eta(v)\mathcal{N}$ とすれば、複素構造から誘導される概接触計量構造 $(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ が入る。M 上の 2 形式 $\mathbb{F}_\phi$ を $\mathbb{F}_\phi(v, w) = \langle v, \phi w\rangle$ と定め、$\mathbb{F}_\kappa = \kappa\mathbb{F}_\phi$ $(\kappa \in \mathbb{R})$ を佐々木磁場と呼び、佐々木磁場の軌道 γ は $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa\phi\dot\gamma$ で与えられる。ケーラー磁場は磁力が軌道の方向によって変わらず一様な磁場の代表例である。一方、佐々木磁場は軌道の方向によって磁力が変わる一様でない磁場の代表例となっている。実超曲面 M 上の滑らかな曲線 γ に対して、等長はめ込み $\iota : M \to \widetilde{M}$ をとると、$\widetilde{M}$ 上の曲線 $\iota \circ \gamma$ を外的形状と呼ぶ。

補題 2　ケーラー多様体 $\widetilde{M}$ の実超曲面 M をとる。$\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ の外的形状が $\mathbb{B}_k$ の軌道になるための必要十分条件が以下で与えられる。

i) $k = \kappa$ かつ $\kappa\eta(\dot\gamma) - \langle A_M\dot\gamma, \dot\gamma\rangle \equiv 0$,　ii) $\eta(\dot\gamma) \equiv \pm 1$ かつ $\langle A_M\dot\gamma, \dot\gamma\rangle - k\eta(\dot\gamma) \equiv 0$.

特に、ii) の場合は測地線になるので i) の場合を考える。複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ (c : 正則断面曲率) の実超曲面である半径 r $(0 < r < \pi/\sqrt{c})$ の測地球面と複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ の実超曲面であるホロ球面 HS、半径 r の測地球面、$\mathbb{C}H^n$ の全測地的部分多様体 $\mathbb{C}H^{n-1}$ を芯とする半径 r の管 $T(r)$ とを合わせて η-全臍的実超曲面であるという。これらの実超曲面の形作用素は $A_M\xi = \delta_M\xi$ と ξ に直交する任意の接ベクトル $v \in TM$ に対して $A_Mv = \lambda_Mv$ が成り立つ。構造捩率 $\rho_\gamma = \eta(\dot\gamma)$ の微分は以下のように表すことができる。

$$\frac{d}{dt}\rho_\gamma = \dot\gamma(\langle\dot\gamma, \xi\rangle) = \langle\kappa\phi\dot\gamma, \xi\rangle + \langle\dot\gamma, JA_M\dot\gamma\rangle = \langle\dot\gamma, \phi A_M\dot\gamma\rangle.$$

A_M の対称性と ϕ の歪対称性を利用し $\phi A = A\phi$ であることから、$\frac{d}{dt}\rho_\gamma = 0$ となり、A 型実超曲面上の任意の軌道に対する構造捩率はその軌道に沿って一定であることがわかる。

*1 e-mail: y.aoki.850@stn.nitech.ac.jp

2　測地球面上の軌道

測地球面上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_{\kappa_1}, \mathbb{F}_{\kappa_2}$ の軌道をそれぞれ γ_1, γ_2 とする。これらが合同である必要十分条件は

$$\text{i) } |\rho_{\gamma_1}| = |\rho_{\gamma_2}| = 1, \quad \text{ii) } |\rho_{\gamma_1}| = |\rho_{\gamma_2}| < 1,\ |\kappa_1| = |\kappa_2| \text{ かつ } \kappa_1\rho_{\gamma_2} = \kappa_2\rho_{\gamma_2}.$$

である。これらを用いることによって、以下の測地球面上の佐々木磁場の軌道の外的形状に関する定理が得られる。

定理１　$M = G(r)$ を $\mathbb{C}P^n(c)$ の半径 r の測地球面とする。任意の 0 でない数 κ を取る。すると、$\mathbb{F}_\kappa$-軌道で、その外的形状がケーラー磁場の軌道である非測地線軌道の同値類の数は次のようになる。

i) $r \leq \pi/(2\sqrt{c})$ のとき、同値類の数は $|\kappa| > \sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ で１個、それ以外で０個

ii) $r > \pi/(2\sqrt{c})$ のとき、同値類の数は $|\kappa| < \sqrt{c}|\cot(\sqrt{c}r)|$ で２個、それ以外で１個

これは、測地球面上で合同でない２つの軌道の外的形状が複素射影空間上で合同な軌道にみえることを示している。

定理２　$M = HS$ を $\mathbb{C}H^n(c)$ のホロ球面とする。任意の 0 でない数 κ を取る。すると、$\mathbb{F}_\kappa$-軌道で、その外的形状がケーラー磁場の軌道である非測地線軌道の同値類の数は、$|\kappa| > \sqrt{|c|}$ のとき同値類は１個、それ以外のとき同値類は０個になる。

定理３　$M = G(r)$ を $\mathbb{C}H^n(c)$ の半径 r の測地球面とする。任意の 0 でない数 κ を取る。すると、$\mathbb{F}_\kappa$-軌道で、その外的形状がケーラー磁場の軌道である非測地線軌道の同値類の数は $|\kappa| > \sqrt{|c|}\coth\sqrt{|c|}r$ のとき同値類は１個、それ以外のとき同値類は０個になる。

定理４　$M = T(r)$ を $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ を芯とするの半径 r の管とする。任意の 0 でない数 κ を取る。すると、$\mathbb{F}_\kappa$-軌道で、その外的形状がケーラー磁場の軌道である非測地線軌道の同値類の数は次のようになる。

1) $\sqrt{|c|} < |\kappa| < \sqrt{|c|}\coth\sqrt{|c|}r$ のとき同値類は２個

2) $|\kappa| \geq \sqrt{|c|}\coth\sqrt{|c|}r$ または $|\kappa| = \sqrt{|c|}$ のとき同値類は１個

3) $|\kappa| < \sqrt{|c|}$ のとき同値類は０個

$\mathbb{C}M^n$ 内の実超曲面が全測地的部分多様体 $\mathbb{C}M^\ell$ $(1 \leq \ell \leq n-2)$ を芯とする半径 r の管 $T_\ell(r)$ のとき、A_2 型実超曲面であるという。ξ と直交するベクトルが作る部分束は２つの主曲率ベクトルによる部分束 $V_1 \oplus V_2$ に分かれる。射影 $\varpi : TM \to V_1$ を使って軌道 γ に対し、主振率 $\omega_\gamma = \|\varpi(\dot{\gamma})\|$ を定めると γ に沿って定数になりこれで分類することにより A_2 型に対しても同様の結果が得られる。

参考文献

[1] Y. Aoki and T. Adachi, *Moduli space of extrinsic circular trajectories on real hypersurfaces of type* $(\mathrm{A})_2$ *in a complex hyperbolic space*, Note di Math **42** (2022), 77-94.

[2] Y. Aoki and T. Adachi, *trajectories on real hypersurfaces of type* (A) *and those on a complex projective space*, preprint.